



# At lytte med det matematiske øre

OLE FREIL, LEKTOR, CAND. PÆD. (MATEMATIK)  
OG KONSULENT I PROJEKTET TIDLIG LITERACY  
- TIDLIG NUMERACY

På en skole på Frederiksberg arbejder O.A med at læse og ordne et- og tocifrede naturlige tal efter størrelse. De har alle trukket et kort med et tal mellem 1 og 20 på og går rundt mellem hinanden. Når de møder en anden elev, skal de tage stilling til, hvem af eleverne der har det største tal, og hvor stor forskellen er mellem tallene. Anna har tallet 13, og hun møder Mathias med tallet 11. De kigger på hinandens tal, Anna løfter sit kort for at vise, at hun har det største tal, og Mathias lukker øjnene, tæller tavst på fingrene og siger derefter to for at angive forskellen mellem tallene. Børnene er engagerede og deltagende, men det er som om, der mangler noget. Der er ikke nogen af eleverne, som siger noget. De angiver, hvem der har det største tal ved enten at løfte tallet eller sige "mig", og en af dem finder forskellen mellem tallene. Som observant på aktiviteten sidder jeg tilbage med flere spørgsmål. Gad vide hvordan eleverne kunne vide, hvilket tal der var størst, og hvordan de fandt forskellen mellem tallene. Mon de alle havde forstået, hvorfor det ene tal var større end det andet, og var det kun nogle få, der kunne finde forskellen mellem de to tal?

Denne artikel handler om, hvorfor dialogen er vigtig, når elever er i gang med at lære matematik, hvad vi skal kigge efter for at finde den "gode" problemstilling, som lægger op til dialog, og hvordan læreren eller pædagogen kan stille spørgsmål, som understøtter dialogen. Undervejs i artiklen vil jeg med inspiration fra lektor Morten Blom-

høj (2007) eksemplificere centrale pointer med fiktive undervisningsepisoder fra en forestillet børnehaveklasse. Morten Blomhøj har udviklet metoden "konstruktion af episoder" med henblik på analyse af læringspotentiale i en undervisningspraksis. De konstruerede episoder – i dette tilfælde dialoger – bruges til normativt at konkretisere, hvad jeg opfatter som eksemplarisk i forhold til en given problemstilling. Hensigten med de konstruerede episoder er altså dels at bringe dialogerne helt tæt på klasserummet, dels at illustrere vigtige teoretiske pointer. De konstruerede episoder er altså eksemplariske i forhold til en bestemt problemstilling, fordi jeg selv konstruerer og modellerer, hvad de involverede parter skal sige og gøre i situationen.

**En vigtig forandring er, at dialog indgår på mange planer – både mellem lærer og elev, men også dialog mellem elever indbyrdes.**

## **Dialog sætter ord på matematisk opmærksomhed**

Jeg talte for nylig med en børnehaveklasseleder, der deltager i Tidlig literacy – tidlig numeracy-projektet, om hendes arbejde med kompetencemålet "Matematisk opmærksomhed". "Børn elsker matematik. De kan godt lide, at man kan

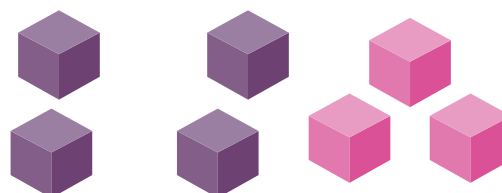
sætte to streger under resultatet, og at tingene ikke er til diskussion.  $2+2$  er jo altid 4, og der er ikke noget at snakke om”, sagde hun. Det er jo på den ene side en sandhed, at sidst jeg regnede efter var  $2+2$  stadig 4, men samtidig har matematikfaget – kaldet ”matematisk opmærksomhed” i børnehaveklassen – undergået en forandring både i indhold og form.

En vigtig forandring er, at dialog indgår på mange planer – både mellem lærer og elev, men også dialog mellem elever indbyrdes. Matematik er ikke længere det fag, som nogle forældre og lærere tænker tilbage på med vemod – andre med skræk, hvor tiden blev brugt til at regne stykker, og hvor man meget sjældent talte sammen. I Tidlig literacy – tidlig numeracy-projektet på Frederiksberg er målet at ”kvalificere arbejdet med læse- og skriveforståelse, matematisk forståelse og sprogkompetencer i den tidlige indskoling” (Lund, 2017). Vi har observeret undervisning i børnehaveklasser på Frederiksberg og efterfølgende haft samtaler med børnehaveklasseledere og SFO-pædagoger, og jeg har erfaret, at flere børnehaveklasseledere og SFO-pædagoger har en opfattelse af matematisk opmærksomhed som noget med at arbejde med tal i form af nogle regnestykker eller tælleopgaver, hvor dialog ofte er en kort udveksling af resultater. ”Jeg fik 15, hvor mange fik du?” - ”Jeg fik kun 13”. Generelt har vi i forbindelse med arbejdet i projektet kun få gange observeret længere samtaler om matematiske problemstillinger, hvor læreren/pædagogen og elever var i dialog med hinanden. Ofte har dialogen været i IRE-form (Gibbons, 2009), hvor eleverne gav korte svar og sagde korte sætninger til hinanden eller til børnehaveklasselederen eller pædagogen.

Forandringen i matematikfaget i retning af mere dialog bygger både på et ændret syn på børns læreprocesser, men også på et ændret syn på viden. Læring bygger på den ene side på, at det er den lærende, som opbygger videns- og forståelsesmønstre ved at gøre sig erfaringer med et område på egen hånd – fx hvordan man tæller et givent antal centicubes. Viden betragtes her som noget personligt. Læring kan på den anden side også ses som en social proces, hvor eleverne lærer ved at kommunikere med andre – børn og voksne – fx om, hvordan man tæller. En dialog kan være:

”Der er 7 centicubes. Jeg behøver ikke at tælle dem. Jeg kan se, at der er 4 der, og så siger jeg bare 5, 6 og 7”.

”Jeg tæller centicubes på en anden måde end dig. De 2 lilla og de 3 pink er 5 til sammen og så 2 mere. 6, 7. Det er 7 centicubes i alt. Det fik du også. Man kan tælle på mange måder”.



*Man kan tælle antallet af centicubes på flere forskellige måder.*

## Tanken er, at eleven ved at forklare og argumentere for metoder og forslag til løsning af et problem udvikler erkendelse om selvsamme problem.

Med udgangspunkt i, at læring også er en social proces, bliver en central del af læreprocessen at være i dialog med voksne og andre elever. Viden betragtes i denne sammenhæng som noget, der skabes mellem mennesker, fx i et klassefællesskab i en børnehaveklasse. Tanken er, at eleven ved at forklare og argumentere for metoder og forslag til løsning af et problem udvikler erkendelse om selvsamme problem (Eriksen, 2009), og at de to former for viden – det personlige og det sociale – får mulighed for at mødes i klassen gennem dialog. Med dette syn på elevers læreprocesser og på viden, bliver lærerens/pædagogens rolle på den ene side at tilrettelægge aktiviteter, hvor det både er relevant at være i dialog og at ”forhandle” viden, og som på den anden side samtidig giver eleven mulighed for at skabe personlig viden. Aktiviteter, der er karakteriseret ved, at der populært sagt er noget at tale om, hvor der er mulighed for både at lære noget sammen, hver for sig og i et klassefællesskab, der er karakteriseret ved, at der er en nysgerrighed på ”den andens” til stede.

I Fælles Mål for børnehaveklassen er det også tænkt, at sprog skal indgå i arbejdet med kompetencemålet ”Matematisk opmærksomhed”, når der står, at arbejdet med sprog skal ”indgå som en dimension i de øvrige kompetenceområder. Eleverne skal udvikle kendskab til kompetenceområdernes særlige sprog, og undervisningen skal sigte mod, at elevernes sprog udvikles, så eleverne kan beskrive, navngive og tale om oplevelser, iagttagelser, genstande og fænomener inden for hvert kompetenceområde” (UVM, 2014).

## Den ”gode” problemstilling

Hvad karakteriserer problemstillinger, som egner sig til at tale om, og hvor der er mulighed for at lære noget sammen i en skolesammenhæng? Den amerikanske matematiklærerforening har forsøgt at opstille pejlemærker for gode problemstillinger (fx Caldwell m. fl., 2014), som i højere grad fokuserer på proces end på produkt, eller som de siger det: ”...support an understanding that goes beyond “how” to “why”” – her i min fortolkning og oversat til danske forhold:

Problemstillingen må

- ▶ forholde sig til Fælles Mål
- ▶ give mulighed for at repræsentere problemet på forskellige måder
- ▶ give mulighed for at udvikle og demonstrere centrale arbejdsmåder
- ▶ give mulighed for samtale og undersøgelse
- ▶ have en lav indgangstærskel og ”højt” til loftet
- ▶ forbinde ”gammel” viden til den nye viden
- ▶ give mulighed for flere løsninger og strategier
- ▶ inkludere en relevant og interessant kontekst.

Et eksempel på en sådan problemstilling oplevede jeg i en børnehaveklasse på en skole på Frederiksberg, hvor de arbejdede med lige og ulige tal. Til at begynde med talte de om, hvordan man kunne se på et tal, om det var lige eller ulige. Dialogen gik nogenlunde sådan (navnene på de citerede børn er ændret):

Børnehaveklasseleder: ”Er 5 et lige eller ulige tal?” (inviterer fem børn op foran tavlen)

Hans: ”Man kan dele dem i 2 og 3. Det er ikke et lige tal. Det er et skævt tal.”

Børnehaveklasseleder: ”Er der nogen, som kan fortælle: Hvad er et lige tal?”

Anton: ”Det er om at dele tallet.”

Filip: ”Det kan man da med alle tal.”

Anton: ”De skal jo være lige store-bunkerne.”

Børnehaveklasseleder: ”Så det er ikke nok, at man kan dele dem i to bunker – bunkerne skal også være lige store.”

Filip: ”6 er lige, fordi man kan dele det i 3 og 3.”

Børnehaveklasselederen viser tallene med centicubes i hænderne og deler dem i højre og venstre hånd, når eleverne sammen undersøger, om tallet er lige eller ulige.

Herefter kom flere eksempler på lige og ulige tal, som børnehaveklasselederen skrev op på tavlen i en lige og en ulige kolonne.



Eksempler på lige og ulige tal oplyst i en ”lige” og en ”ulige” kolonne.

Vi kan se spor af flere af pejlemærkerne for en "god" problemstilling i dialogen mellem eleverne og børnehaveklasselederen. Det er muligt at repræsentere problemstillingen på flere måder. Børnehaveklasselederen understøtter dialogen ved vise tallene med centicubes i hver hånd. Når de undersøger, om et tal er lige eller ulige, skriver de tallet med symbolsprog og viser med centicubes, hvordan tallet kan deles i to lige store bunker, hvis det er lige.

Børnene repræsenterer problemstillingen konkret, når de deler et antal børn i to (næsten) lige store grupper. Sprogligt repræsenterer de problemstillingen, når de siger, at det gælder om at "dele i lige store bunker". De mange repræsentationer understøtter samtalen og gør, at flere børn kommer til at 'eje' problemstillingen.

Noget tyder på, at opgaven har en *lav indgangstærskel* og *"højt" til loftet*. Eleverne går ubesværet i gang med arbejdet med at finde lige og ulige tal, hvilket peger i retning af en lav indgangstærskel, men samtidig er det muligt at arbejde på forskellige niveauer med den samme problemstilling. Nogle elever arbejder med konkrete tal, og andre elever arbejder med at generalisere ved at forholde sig til, hvordan man generelt kan afgøre, om et tal er lige eller ulige – der er højt til loftet. Vi så forskellige strategier til at løse problemstillingen. Nogle arbejdede med centicubes, som de delte i bunker, andre kunne tælle sig frem, fordi tallene i talrækken er skiftevis lige og ulige, mens andre igen kunne løse problemstillingen ved at dele tallene op i mindre tal "14 kan deles i 5 og 5 og 2 og 2", som en elev sagde under arbejdet ude ved bordene.

Børnehaveklasselederen nåede ikke at samle op på problemstillingen, men følgende konstruerede episode kunne have udspillet sig under en sådan opsamling:

Børnehaveklasseleder: "Hvem kan fortælle mig nogle lige og ulige tal?"

Vera: "2 og 6 og 10 er lige."

Børnehaveklasseleder: "Hvordan kan du vide, at de alle er lige tal?"

Vera: "Jeg delte dem i to lige store bunker, men det havde jeg ikke behøvet. For 6 er det samme som to treere."

Pil: "Men 3 og 7 er ulige tal."

Børnehaveklasseleder: "Hvordan fandt du ud af det?"

Pil: "Jeg ved, at først kommer der et lige tal, så et ulige tal og så et lige tal. 2 og 6 er lige... så må 3 og 7 være ulige."

Børnehaveklasseleder: "Fortsætter det sådan altid?"

Aisha: "Hmmm ... ja. Når man har haft et lige tal, så bliver der en mere. Den skal ligge i en af bunkerne jo."

Børnehaveklasseleder: "Kan I andre forstå, hvad Aisha siger?"

...

Børnehaveklasseleder: "Hvordan kan man finde ud af, om et stort tal er lige eller ulige?"

Saga: "Jeg er ikke sikker, men det er som, at der er noget med 2, 4, 8 i tallet på etterpladsen."



*Der er mulighed for at repræsentere en problemstilling med konkrete materialer.*

Der er rig mulighed for at *samtale* om problemstillingen, og hele aktiviteten er gennemsyret af *undersøgelse*. Problemstillingen giver mulighed for at "*forbinde gammel viden med den nye viden*", når

børnene hele vejen igennem bygger på deres viden om talrækken til at finde ud af, om et tal er lige eller ulige.

## Lærere og pædagoger skal blive bedre til at lytte med det matematiske øre.

### At lytte med det matematiske øre

Et spørgsmål, som jeg ofte er blevet stillet i arbejdet med Tidlig literacy – tidlig numeracy-projektet, er, hvordan og hvor man finder de ”gode” problemstillinger. At kunne finde på eller spotte en god problemstilling er ikke altid lige let, men måske ovenstående pejlemærker kan hjælpe børnehaveklasselederen eller pædagogen til at se den gode problemstilling. Samtidig er det min erfaring, både i arbejdet som lærer i indskoling, i arbejdet med at uddanne lærerstuderende og i projektets regi, at den største barriere for arbejdet med matematisk opmærksomhed ligger hos læreren, børnehaveklasselederen eller pædagogen. At kunne se en god problemstilling og at blive god til at lytte med det matematiske øre efter potentielt ”gode” problemstillinger.

En af ambitionerne i forbindelse med Tidlig literacy – tidlig numeracy-projektet er, at lærere og pædagoger skal blive bedre til at lytte med det matematiske øre i fællesskab og alene, eller i fællesskab, at blive gode til at spotte situationer som kan danne udgangspunkt for matematisk opmærksomhed. Det kan være bagning i SFO'en, hvor man skal købe ind, veje ting af, blande i rigtig rækkefølge, forme og bage ved rette temperatur og vel at mærke ende med faktisk at have bagt nogle kager. Det kunne også være at kunne se figurer, mønstre og enkle geometriske figurer (UVM, 2014), når eleverne arbejder med at lave mønstre på perleplader. De skal også kunne se, at eleverne har mulighed for gennem lege og i praktiske situationer at ”udvikle varierede metoder til antalsbestemmelse (UVM, 2014), når eleverne klunser, tæller karameller, leger fangeleg eller opdeler hold, og at der er rig mulighed for at bringe sprog og enkle mundtlige forklaringer i spil i forbindelse i dette arbejde.

### Stil mange spørgsmål og giv få svar

En måde, hvorpå vi kan fremme dialog og enkle mundtlige forklaringer i arbejdet med matematisk opmærksomhed i børnehaveklassen (og senere i skoleforløbet!) og i arbejdet med ”gode” problemstillinger er ved i højere grad at stille spørgsmål fremfor at give svar på elevernes spørgsmål.

## Hver gang du får lyst til at fortælle eleverne noget eller svare på et spørgsmål, så tag dig i det og stil et spørgsmål i stedet for.

En amerikansk matematiklærer Steven Reinhardt (2000) har erfaring med, at børnene kommer til at lære mere matematik og generelt bliver mere aktive i undervisningen på denne måde. I arbejdet med at stille flere og anderledes spørgsmål har hans definition af, hvad der kendetegner den ”gode lærer”, ændret sig fra ”en som er så god til at forklare ting, at eleverne forstår det” til ”en der får elever til at forklare ting så godt, at de kan blive forstået af andre elever” (mine oversættelser). Han kommer med følgende fem anbefalinger til spørgeteknikker, som fremmer dialog i undervisningen:

1. **Sig aldrig noget, som et barn kunne have sagt.** Hver gang du får lyst til at fortælle eleverne noget eller svare på et spørgsmål, så tag dig i det og stil et spørgsmål i stedet for.
2. **Stil gode spørgsmål,** hvor eleverne får mulighed for at lære noget ved at svare på dem, og læreren samtidig får mulighed for at få indsigt i, hvad eleven kan og ved.
3. **Spørg oftere til processer end til produkter.** Produktspørgsmål som ”Hvor meget er  $4+9$ ?” kræver ofte kun korte svar – i dette tilfælde 13, mens processpørgsmål tvinger svareren til tænke: ”Hvordan kan man finde ud af, hvor meget  $4+9$  er?”, ”Kan I finde andre plusstykker, som også giver 13?”, ”Kan I finde andre måder at finde resultatet på?”, ”Hvad er forskellen på de to måder?”
4. **Erstat lange forklaringer** i undervisningen med nogle spørgsmål.

5. **Hav tålmodighed** med dem, som svarer. Tænketid er vigtigt, og de fleste elever (også de som rækker hånden op med det samme) har brug for mere tid til at tænke og reflektere.

Generelt anbefaler Reinhardt at bruge lang tid på at løse og tale om det, han kalder "high-quality problems" ("gode" problemstillinger?) – *less is more*.

Som inspiration til, hvad det vil sige at stille gode spørgsmål, opdeler matematikdidaktikerne Staples og Colonis klasserumsdiskussioner i to forskellige typer. Dele-diskussioner og kollaborative diskussioner (Staples og Colonis, 2007). I begge typer af diskussioner stiller læreren spørgsmål, hvor eleverne opfordres til at dele deres tænkning med andre elever i klassen, men i dele-diskussioner er det primære fokus på elevens egen tænkning, mens eleverne i den kollaborative diskussion yderligere skal forholde deres egen tænkning til andres elevers tænkning.

I dele-diskussionen kunne børnehaveklasselederen fx spørge: "Hvordan kan du vide, at 6 er et lige tal?", mens følgende konstruerede episode kunne udspille sig i forhold til den kollaborative diskussion:

Børnehaveklasseleder: "Vera deler i to lige store bunker, når hun skal se, om et tal er lige. Kan I vise, hvordan Vera ville finde ud af, om 17 er et lige eller ulige tal?"

Saga: "Man kunne tælle fra 1 og sige lige, ulige, lige... osv. Indtil man har talt 17."

Børnehaveklasseleder: "Men Vera deler jo i to bunker. Hvordan er det det samme, som når du tæller?"

Saga: "Det er jo også to bunker. En bunke med lige og en bunke med ulige."

Børnehaveklasseleder: "Er der nogen, som kan bruge Sagas måde til at finde ud af, om 11 er et lige tal?"

Eleverne opfordres til at lytte til, prøve at forstå og se løsningen på et problem fra den andens per-

spektiv og holde det op imod egen tænkning. I den kollaborative diskussion er det børnehaveklasseleders rolle at spørge til, hvordan elevernes bidrag forholder sig til det, andre elever tidligere har sagt, fx ved at sige: "Hvordan er din metode til at regne 4+9 forskellig fra den måde, Vera regner?" eller "Hvad er det samme, og hvad er forskelligt i forhold til det, Pil sagde?" Den kollaborative diskussion har som sidegevinst, at den giver mulighed for at komme til at tale om "forkerte" svar i et ufarligt rum. Forkerte svar kan være en katalysator for en klassesamtale, fordi man kan komme til at tale om, hvordan noget er "forkert" som en kilde til at lære noget nyt. Forkerte svar bliver en ressource til at lære nyt.

Hvis vi skal opsummere god numeracy-pædagogik i forhold til den matematiske samtale i børnehaveklassen, så er det først og fremmest vigtigt at se "matematisk opmærksomhed" som et kompetenceområde, hvor det er en uundværlig del af læreprocessen at være i dialog – både lærer og elev, men også elev-elev-dialog.

## Det er eleverne, som skal tale mest – ikke børnehaveklasselederen.

Det er afgørende, at problemstillingen er af en karakter, som åbner for dialog, og her kan pejlemærker for en "god" problemstilling være brugbare. Sidst, men ikke mindst, spiller børnehaveklasselederen eller pædagogen en helt central rolle i den måde, hun stiller spørgsmål på. "Sig aldrig noget, som et barn kunne have sagt" er selvfølgelig et radikalt bud på en spørgeteknik, men det kan være med til at give retning på børnehaveklasseleders rolle i samtaler med eleverne. Det er eleverne, som skal tale mest – ikke børnehaveklasselederen.

## Referencer

Blomhøj, M. (2007). Konstruktion af episoder som forskningsmetode - læringsmuligheder i IT-støttet matematikundervisning. I: Skovsmose, O., & Blomhøj, M. (red.), *Kunne det tænkes?: Om matematiklæring*. 1. udg. (s. 228-254) København: Malling Beck.

Caldwell, J. H., Kobett, B., & Karp, K.. (2014). *Putting Essential Understanding into Practice in Prekindergarten–Grade 2*. NCTM.

Eriksen, D. B. (2000). Den sproglige dimension. I: Jansen, M., & Jensen. H. N. (red.), *Undervisning i matematik*, s. 28 - 59. København: Kroghs Forlag.

Gibbons, P. (2009). Building Bridges to Texts. I: *English Learners Academic Literacy and Thinking*. Heinman.

Nationalt Videncenter for Læsning (2017) *Tidlig literacy og tidlig numeracy på Frederiksberg*. Lokaliseret d. 24. maj 2017 på: <http://www.videnomlaesning.dk/aktuelt/nyheder/2016/tidlig-literacy-og-tidlig-numeracy-paa-frederiksberg/>

Reinhardt, S. C. (2000). *Mathematics Teaching in the middle school*. NCTM.

Reinhart, S. C. (2000). *Never Say Anything a Kid Can Say*. Lokaliseret d. 24. maj 2017 på: <https://www.georgiastandards.org/resources/Online%20High%20School%20Math%20Training%20Materials/Math-I-Session-5-Never-Say-Anything-a-Kid-Can-Say-Article.pdf>

Staples, M., & Colonis, M. (2007). Making the most of Mathematical Discussions. *Mathematical Teacher*, Vol. 101, no. 4.

UVM (2014). *Fælles Mål for børnehaveklassen*. Lokaliseret d. 24. maj 2017 på: <http://www.emu.dk/omraade/gsk-1%C3%A6rer/ffm/b%C3%B8rnehaveklassen>